Ensembles d'unicité pour les polynômes *

Tien-Cuong Dinh †

February 1, 2008

Abstract

Let $E \subset \mathbb{C}$ be a compact set of positive logarithmic capacity. Let us suppose that for every polynomial $P \neq \mathrm{id}$ we have $P^{-1}(E) \neq E$. Then for all no constant polynomials f and g such that $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$ we have $f = g$.

1 Introduction

On note $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la droite projective complexe. Un compact E de $\mathbb{C}$ est appelé *ensemble d'unicité* si pour tous polynômes non constants f et g vérifiant $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$ on a $f = g$. S'il existe un polynôme $P \neq \mathrm{id}$ tel que $P^{-1}(E) = E$, alors E n'est pas un ensemble d'unicité.

Question 1 *Supposons que $P^{-1}(E) \neq E$ pour tout polynôme $P \neq \mathrm{id}$. E est-t-il un ensemble d'unicité?*

Les ensembles d'unicité pour les polynômes de même degré sont déterminés par Ostrovskii, Pakovitch et Zaidenberg [11, 12]. Les ensembles d'unicité pour les fonctions entières ou méromorphes avec un nombre minimal d'éléments sont étudiés par Nevanlinna et également par plusieurs autres auteurs (*voir* par exemple [7, 14, 9]).

*__Classification mathématique:__ 30D05, 58F23.
Mots clés: ensemble d'unicité, ensemble de Julia, mesure invariante.

†Mathématique-Bâtiment 425, Université Paris-Sud, 91405 ORSAY Cedex (France). E-mails: TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr.

Question 2 *Soit μ une mesure de probabilité à support compact dans $\mathbb{C}$. Pour quels polynômes f et g de degrés $d \geq 1$ et $d' \geq 1$ on a $d^{-1}f^*(\mu) = d'^{-1}g^*(\mu)$?*

Les deux questions posées ci-dessus sont étroitement liées. En effet, si la capacité logarithmique E est positive et si $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$, alors $d^{-1}f^*(\mu) = d'^{-1}g^*(\mu)$ pour la mesure d'équilibre μ de E. Réciproquement, si E est le support de μ et si $d^{-1}f^*(\mu) = d'^{-1}g^*(\mu)$, on a $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$. De plus, on peut trouver un compact E_0 de capacité logarithmique positive tel que $f^{-1}(E_0) = g^{-1}(E_0)$ (*voir* le paragraphe 3). Lorsque $f \neq g$, E et E_0 ne sont donc pas ensembles d'unicité. Les deux cas particuliers de ces problèmes sont le problème de détermination des fonctions ayant le même ensemble de Julia ou la même mesure totalement invariante et le problème de détermination des fonctions permutables [6, 8, 1] (*voir* également [13, 5, 10, 3, 4]). Notre résultat principal est le théorème suivant:

Théorème 1 *Soient μ une mesure de probabilité à support compact dans $\mathbb{C}$ et f, g deux polynômes de degrés $d \geq 1$ et $d' \geq 1$. Soit m le plus grand diviseur commun de d et d'. Supposons que $d^{-1}f^*(\mu) = d'^{-1}g^*(\mu)$. Alors il existe un polynôme Q de degré m et des polynômes f_0, g_0 tels que $f = f_0 \circ Q$, $g = g_0 \circ Q$ et tels que l'une des conditions suivantes soit vraie:*

1. $f_0 = \mathrm{id}$ *ou* $g_0 = \mathrm{id}$.
2. *$d > m$, $d' > m$ et pour une certaine coordonnée z de $\mathbb{C}$ on a $f_0(z) = z^{d/m}$, $g_0(z) = az^{d'/m}$ où $a \neq 0$ est une constante.*
3. *$d > m$, $d' > m$ et pour une certaine coordonnée z de $\mathbb{C}$ on a $f_0 = \pm\mathrm{T}_{d/m}$, $g_0 = \pm\mathrm{T}_{d'/m}$ où T_k est le polynôme de Tchebychev de degré k.*

Corollaire 1 *Soit E un compact de capacité logarithmique positive de $\mathbb{C}$. Alors E est un ensemble d'unicité si et seulement si pour tout polynôme $P \neq \mathrm{id}$ on a $P^{-1}(E) \neq E$.*

Soit P un polynôme de degré au moins deux. *L'ensemble de Julia rempli* K_P de P est l'ensemble des points d'orbite bornée, i.e. les points z tels que les suites $\{P^n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ soient bornées. Ici on note $P^n := P \circ \cdots \circ P$ le n-ième itéré de P. *L'ensemble de Julia* J_P est le bord topologique de l'ensemble K_P. Alors K_P est le plus grand compact *totalement invariant* par

P, i.e. $P^{-1}(K_P) = K_P$. L'ensemble J_P est le plus petit compact totalement invariant par P qui contient plus qu'un élément (*voir* par exemple [2, 4.2.2]).

Corollaire 2 *Soit E un compact de capacité logarithmique positive de $\mathbb{C}$. Supposons que E n'est pas un ensemble d'unicité et que E n'est pas invariant par aucune rotation de $\mathbb{C}$. Alors il existe un polynôme P de degré au moins deux tel que $P^{-1}(E) = E$ et $J_P \subset E \subset K_P$.*

Si dans un ouvert U l'intersection $J_P \cap U$ est un ensemble non vide, inclus dans une courbe réelle lisse, alors $P(z) = z^d$ ou $P(z) = \pm \mathrm{T}_d(z)$ pour une certaine coordonnée z de $\mathbb{C}$ [15, p.127]. La notation T_d signifie *le polynôme de Tchebychev* de degré d défini par $\mathrm{T}_d(\cos t) := \cos dt$. Si $P(z) = z^d$, K_P est le disque unité, J_P est le cercle unité; si $P(z) = \pm \mathrm{T}_d(z)$, K_p et J_p sont égaux au segment $[-1, 1]$. On en déduit facilement que, toute courbe réelle lisse par morceaux, qui n'est invariante par aucune rotation, est un ensemble d'unicité.

L'ensemble J_P est le support d'une mesure de probabilité μ_P qui est *totalement invariante* par P, i.e. $(\deg P)^{-1} P^*(\mu_P) = \mu_P$. C'est la seule mesure de probabilité à support compact qui est totalement invariante par P sauf dans le cas où $P(z) = z^d$ pour une certaine coordonnée z de $\mathbb{C}$. Dans ce cas exceptionnel, toute mesure totalement invariante est une combinaison linéaire de la mesure de Lebesgue sur le cercle unité et de la masse de Dirac en 0. Dans le théorème 1, si $g_0 = \mathrm{id}$, $\deg f_0 \geq 2$ et si f_0 n'est pas conjugué à $z^{d/m}$ on a $\mu = \mu_{f_0}$. Dans la deuxième condition du théorème 1, μ est une combinaison linéaire de la masse de Dirac en 0 et de la mesure de Lebesgue sur le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = |a|^{d/(d-d')}\}$. Dans la troisième condition de ce théorème, μ est la mesure totalement invariante des polynômes de Tchebychev.

Dans la preuve du théorème 1, on se ramène à des systèmes dynamiques holomorphes en une et en plusieurs variables. D'abord, on peut choisir une fonction subharmonique φ_0 telle que $i\partial\overline{\partial}\varphi_0 = \mu$ et $d^{-1}\varphi_0 \circ f = d'^{-1}\varphi_0 \circ g =: \varphi_{-1}$. Notons $\delta_f(z) := \exp(2i\pi/d)z + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots$ le germe d'application holomorphe défini au voisinage de ∞ qui préserve les fibres de f. Notons δ_g le germe analogue pour g. Alors δ_f et δ_g préservent les lignes de niveau de φ_{-1}. Dans une coordonnée locale convenable, les lignes de niveau de φ_{-1} au voisinage de ∞ sont les cercles de centre ∞. Par conséquent, pour cette coordonnée locale, δ_f et δ_g sont des rotations. D'où $\delta_f \circ \delta_g = \delta_g \circ \delta_f$ et $\delta_f^{d/m} = \delta_g^{d'/m} =: \delta$. Notons $\mathcal{F}_f(z)$ *la fibre* de f qui contient z, i.e. $\mathcal{F}_f(z) = f^{-1} \circ f(z)$.

Le polynôme Q sera défini comme un polynôme dont toute fibre générique $\mathcal{F}_Q(z)$ est égale à l'intersection $\mathcal{F}_f(z) \cap \mathcal{F}_g(z)$. Au voisinage de ∞, la fibre $\mathcal{F}_Q(z)$ est l'orbite de z par δ. Ceci entraîne que Q est bien défini et qu'il est de degré m (proposition 2). Si $m = d$ ou $m = d'$, on peut choisir $P = f$ ou $P = g$; la condition 1 du théorème 1 est alors vraie. Pour la suite de la preuve, on peut supposer que $d > 1$ et $d' > 1$ sont premiers entre eux.

Notons Φ un polynôme de degré dd' vérifiant $\mathcal{F}_\Phi(z) = g^{-1} \circ g(\mathcal{F}_f(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Au voisinage de ∞, $\mathcal{F}_\Phi(z)$ est l'ensemble des points $\delta_g^n \circ \delta_f^m(z)$ car δ_f et δ_g commutent. Ceci entraîne que Φ existe et que $\mathcal{F}_\Phi(z) = f^{-1} \circ f(\mathcal{F}_g(z))$ (proposition 2). Alors on peut décomposer $\Phi = f_1 \circ g = g_1 \circ f$ où f_1 (resp. g_1) est un polynôme de degré d (resp. d'). En suite, on peut montrer que $\mathcal{C}_{f_1} = g(\mathcal{C}_f)$ et $\mathcal{C}_{g_1} = f(\mathcal{C}_g)$ où $\mathcal{C}$ signifie l'ensemble critique. Ceci, sous certaines conditions posées sur les coefficients dominants et sur les valeurs de polynômes en 0, permet de construire un endomorphisme polynomial $\mathcal{D}_{d,d'}$ de l'ensemble $\Sigma(d, d')$ des couples (f, g). L'ensemble des couples (f, g) qui vérifient les hypothèses du théorème 1, est un sous-ensemble algébrique $\mathcal{N}(d, d')$ invariant par $\mathcal{D}_{d,d'}$. L'ensemble des couples (f, g) qui vérifient la condition 2 ou 3 du théorème 1, décrit deux courbes $\mathcal{C}_1(d, d')$ et $\mathcal{C}_2(d, d')$. Il reste à prouver que $\mathcal{N}(d, d') = \mathcal{C}_1(d, d') \cup \mathcal{C}_2(d, d')$. On montrera que les points périodiques de $\mathcal{N}(d, d')$ appartiennent à $\mathcal{C}_1(d, d') \cup \mathcal{C}_2(d, d')$. Ceci est dû à la solution d'une équation bien connue: $f \circ g = g \circ f$ (en particulier, pour les points fixes, on obtient directement $\Phi = f \circ g = g \circ f$). Finalement, l'invariance de $\mathcal{N}(d, d')$ par $\mathcal{D}_{d,d'}$ implique que $\mathcal{N}(d, d') = \mathcal{C}_1(d, d') \cup \mathcal{C}_2(d, d')$.

Remerciement.— Je tiens à remercier Charles Favre et Nessim Sibony pour leurs aides pendant la préparation de cet article.

2 Factorisation de polynômes

Soit P un polynôme de degré $d \geq 1$. Il existe une fonction holomorphe unique $B(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots$ définie au voisinage de ∞ telle que $B \circ P \circ B^{-1} = \alpha z^d$ où α est le coefficient dominant de P (*voir* par exemple [2, 6.10.1]). On définit la fonction δ_P par la formule $\delta_P(z) := B^{-1}(\theta_d B(z))$ où $\theta_d := \exp(2\pi i/d)$. Cette fonction est définie au voisinage de ∞, permute les éléments de chaque fibre de P et vérifie $P \circ \delta_P = P$, $\delta_P^d = \mathrm{id}$. Soit Φ une application définie dans un voisinage suffisamment petit de ∞ à l'image dans un espace X. Alors Φ s'écrit sous la forme $G \circ P$ si et seulement si δ_P

préserve les fibres de Φ, i.e. $\Phi \circ \delta_P = \Phi$.

Proposition 1 *Soient X un espace métrique, a un point de X et Φ une application définie dans un voisinage suffisamment petit de ∞ à l'image dans $X \setminus \{a\}$ vérifiant $\lim_{z\to\infty} \Phi(z) = a$. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de degrés $d_1 \geq 1$ et $d_2 \geq 1$ tels que Φ s'écrive sous les formes $\Phi = G_1 \circ P_1 = G_2 \circ P_2$. Soit m le plus grand diviseur commun de d_1 et d_2. Alors $\delta_{P_1} \circ \delta_{P_2} = \delta_{P_2} \circ \delta_{P_1}$ et $\delta_{P_1}^{d_1/m} = \delta_{P_2}^{d_2/m}$. En particulier, si $d_1 = d_2$ il existe un polynôme linéaire σ tel que $P_1 = \sigma \circ P_2$.*

Preuve— On montre que $\delta_{P_1} \circ \delta_{P_2} = \delta_{P_2} \circ \delta_{P_1}$. Supposons que $\delta := \delta_{P_1}^{-1} \circ \delta_{P_2} \circ \delta_{P_1} \circ \delta_{P_2}^{-1} \neq \mathrm{id}$. Remarquons que δ s'écrit sous la forme $\delta(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots$. La dynamique d'une telle application est bien connue (*voir* par exemple [2, 6.5]). Il existe un point z tel que $\delta^n(z)$ tende vers ∞ quand $n \to +\infty$. Par conséquent, $\Phi(\delta^n(z))$ tend vers a. C'est une contradiction car $\Phi \circ \delta = \Phi$. De même manière, on montre que $\delta_{P_1}^{d_1/m} \circ \delta_{P_2}^{-d_2/m} = \mathrm{id}$ et $\delta_{P_1}^{d_1/m} = \delta_{P_2}^{d_2/m}$.

Si $d_1 = d_2$, on a $\delta_{P_1} = \delta_{P_2}$. Par conséquent, $\mathcal{F}_{P_1}(z) = \mathcal{F}_{P_2}(z)$ au voisinage de ∞. Par analyticité, ceci est vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors on peut définir la fonction σ holomorphe dans $\mathbb{C}$ par $\sigma := P_1 \circ P_2^{-1}$. Il est clair que σ est bijective. Par conséquent, σ est linéaire et $P_1 = \sigma \circ P_2$.

$\square$

Pour tout polynôme P, on note $\mathcal{C}_P$ l'ensemble critique de P. Un point de $\mathcal{C}_P$ sera compté k fois s'il est de multiplicité k.

Proposition 2 *Soient P_1 et P_2 deux polynômes de degrés $d_1 \geq 1$ et $d_2 \geq 1$. Soit m le plus grand diviseur commun de d_1 et d_2.*

1. *Si Φ est un polynôme vérifiant $\Phi \circ \delta_{P_1} = \Phi$ au voisinage de ∞, alors il existe un polynôme R tel que $\Phi = R \circ P_1$.*

2. *Si $\delta_{P_1}^{d_1/m} = \delta_{P_2}^{d_2/m}$ alors il existe un polynôme Q de degré m et des polynômes R_1, R_2 tels que $P_1 = R_1 \circ Q$ et $P_2 = R_2 \circ Q$. En particulier, si $d' = m$ il existe un polynôme R tel que $P_1 = R \circ P_2$.*

3. *Si $m = 1$ et si $\delta_{P_1} \circ \delta_{P_2} = \delta_{P_2} \circ \delta_{P_1}$, il existe un polynôme Φ de degré $d_1 d_2$ et des polynômes P_1^*, P_2^* tels que $\Phi = P_1^* \circ P_2 = P_2^* \circ P_1$. De plus, on a $\mathcal{C}_{P_1^*} = P_2(\mathcal{C}_{P_1})$ et $\mathcal{C}_{P_2^*} = P_1(\mathcal{C}_{P_2})$.*

Preuve— **1.** Le fait que $\Phi \circ \delta_{P_1}$ implique que $\mathcal{F}_{P_1}(z) \subset \mathcal{F}_\Phi(z)$ pour z dans un voisinage de ∞. Par analyticité, ceci est vrai pour tout z. Par conséquent, on peut définir la fonction R holomorphe dans $\mathbb{C}$ par $R(z) := \Phi \circ P^{-1}(z)$. On a $\Phi = R \circ P_1$. Comme Φ et P sont des polynômes, $\lim_{z\to\infty} R(z) = \infty$. Donc R est un polynôme.

2. On note $w := (w_1, w_2)$ les coordonnées de $\mathbb{C}^2$. Soient $\Pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ défini par $\Pi(z) := (P_1(z), P_2(z))$ et $\mathcal{C} := \Pi(\mathbb{C})$. Alors $\mathcal{C}$ est une courbe algébrique de $\mathbb{C}^2$. De plus, elle est parabolique car elle est l'image de $\mathbb{C}$ par une application holomorphe. D'où $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{C}$ ou un $\mathbb{C}^*$ immergé dans $\mathbb{C}^2$. La courbe compactifiée $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2$ est donc rationnelle. Comme $P(z)/Q(z)$ a une limite finie ou infinie quand $z \to \infty$, $\overline{\mathcal{C}}$ coupe la droite infinie L en un seul point a. De plus, au voisinage de a, $\overline{\mathcal{C}}$ est irréductible car c'est l'image d'un voisinage de ∞ par l'application Π. On en déduit que $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} \setminus \{a\}$ est un $\mathbb{C}$ immergé. Soit $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ une application holomorphe, injective en dehors d'un nombre fini de points. On pose $Q := \varphi^{-1} \circ \Pi$. Alors Q est une fonction holomorphe définie en dehors d'un nombre fini de points au voisinage desquels elle est bornée. Par conséquent, Q se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On vérifie facilement que $\lim_{z\to\infty} Q(z) = \infty$. Donc Q est un polynôme. On pose $\delta := \delta_{P_1}^{d_1/m} = \delta_{P_2}^{d_2/m}$.

Au voisinage de ∞, on a

$$Q \circ \delta = \varphi^{-1} \circ (P_1 \circ \delta, P_2 \circ \delta) = \varphi^{-1} \circ (P_1, P_2) = Q.$$

Soient z_1 et z_2 suffisamment proches de ∞ tels que $Q(z_1) = Q(z_2)$. Alors $P_1(z_1) = P_1(z_1)$ et $P_2(z_1) = P_2(z_2)$. Il existe donc les entiers $0 \le n_1 \le d_1 - 1$ et $0 \le n_2 \le d_2 - 1$ tels que $z_1 = \delta_{P_1}^{n_1}(z_2) = \delta_{P_2}^{n_2}(z_2)$. De plus, on sait que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\delta_{P_j}^{n_j}(z)}{z} = \exp(2n_j\pi i/d_j).$$

Par conséquent, l'égalité $\delta_{P_1}^{n_1}(z_2) = \delta_{P_2}^{n_2}(z_2)$ pour z_2 suffisamment proche de ∞ implique que $n_j m$ est divisible par d_j pour $j = 1$ ou 2. On a alors $z_1 = \delta^{n_1 m/d_1}(z_2)$.

Les deux arguments ci-dessus montrent que $\delta_Q = \delta$. Par conséquent, $\deg Q = m$. D'après la première partie, il existe des polynômes R_1 et R_2 tels que $P_1 = R_1 \circ Q$ et $P_2 = R_2 \circ Q$.

On remarque que $\mathcal{F}_Q(z) = \mathcal{F}_{P_1}(z) \cap \mathcal{F}_{P_2}(z)$ pour un z générique car ceci est vrai au voisinage de ∞. On peut également prouver cette partie par la même méthode que l'on utilisera dans la troisième partie.

3. Comme $m=1$, il existe des entiers relatifs n_1 et n_2 tels que $n_1d_2+n_2d_1=1$. Posons $\delta := \delta_{P_1}^{n_1}\circ\delta_{P_2}^{n_2}$. Alors δ s'écrit sous la forme $\delta(z)=\exp(2\pi i/dd')z+a_0+a_1z^{-1}+\cdots$. Notons $\mathcal{F}(z)=P_2^{-1}\circ P_2(\mathcal{F}_{P_1}(z))$. Un point de $\mathcal{F}(z)$ est compté k fois s'il est de multiplicité k. Alors $\mathcal{F}(z)$ est de cardinal dd' et au voisinage de ∞, $\mathcal{F}(z)$ est l'orbite de z par δ car $\delta_{P_1}\circ\delta_{P_2}=\delta_{P_2}\circ\delta_{P_1}$. On en déduit que $\mathcal{F}(z)=P_1^{-1}\circ P_1(\mathcal{F}_{P_2}(z))$ au voisinage de ∞. Par analyticité, ceci est vrai pour tout z.

Pour tout $1\leq n\leq dd'-1$, on note $S_n(z)$ la somme symétrique des termes du type $z_1\ldots z_n$ avec $\{z_1,\ldots,z_n\}\subset\mathcal{F}(z)$. Alors $S_n(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Il est clair que $|\delta_{P_1}^i\circ\delta_{P_2}^j(z)/z|$ tend vers 1 quand $z\to\infty$ pour tous i et j. Par conséquent, $S_n(z)=\mathrm{O}(|z|^n)$ quand $z\to\infty$. On en déduit que $\deg S_n\leq n\leq dd'-1$. Comme au voisinage de ∞, $\mathcal{F}(z)$ est l'orbite de z par δ, on a $\mathcal{F}(z)=\mathcal{F}(z_1)$ pour tout $z_1\in\mathcal{F}(z)$. Par conséquent, S_n est constant sur $\mathcal{F}(z)$. Le fait que $\mathcal{F}(z)$ est de cardinal $dd'>\deg S_n$ implique que S_n est un polynôme constant. Soit Φ le polynôme de degré dd' défini par:

$$\Phi(z):=z^{dd'}-S_1z^{dd'-1}+\cdots+(-1)^{dd'-1}S_{dd'-1}z.$$

Alors au voisinage de ∞, $\mathcal{F}_\Phi(z)=\mathcal{F}(z)$. Par analyticité, ceci est vrai pour tout z. Par conséquent, $\Phi\circ\delta_{P_1}=\Phi$ et $\Phi\circ\delta_{P_2}=\Phi$. D'après la première partie, il existe des polynômes P_1^* et P_2^* tels que $\Phi=P_1^*\circ P_2=P_2^*\circ P_1$.

On a $\mathcal{C}_\Phi=\mathcal{C}_{P_2}\cup P_2^{-1}(\mathcal{C}_{P_1^*})$. Ici la notation $\mathcal{C}$ signifie l'ensemble critique et un point critique sera compté k fois s'il est de multiplicité k. Remarquons qu'un point critique z de Φ est de multiplicité k si et seulement si z est un point de multiplicité $k+1$ de $\mathcal{F}(z)$. Comme $\mathcal{F}(z)=P_2^{-1}\circ P_2(\mathcal{F}_{P_1}(z))$, on a $\mathcal{C}_\Phi=\mathcal{C}_{P_2}\cup P_2^{-1}\circ P_2(\mathcal{C}_{P_1})$. Alors $P_2^{-1}(\mathcal{C}_{P_1^*})=P_2^{-1}\circ P_2(\mathcal{C}_{P_1})$ car $\mathcal{C}_\Phi=\mathcal{C}_{P_2}\cup P_2^{-1}(\mathcal{C}_{P_1^*})$. D'où $\mathcal{C}_{P_1^*}=P_2(\mathcal{C}_{P_1})$. De même, on a $\mathcal{C}_{P_2^*}=P_1(\mathcal{C}_{P_2})$.

□

Soient μ une mesure de probabilité à support compact et f, g deux polynômes de degrés d et d' vérifiant $d^{-1}f^*(\mu)=d'^{-1}g^*(\mu)$. Soit φ une fonction sub-harmonique vérifiant $i\partial\overline{\partial}\varphi=\mu$. Cette fonction est harmonique sur la composante non bornée de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{supp}(\mu)$; elle est unique à une constante près. De plus, $\varphi-\ln|z|$ est harmonique et bornée au voisinage de ∞. Posons $\psi:=d^{-1}\varphi\circ f$. Alors $i\partial\overline{\partial}\psi=d^{-1}f^*(\mu)$. Comme $d^{-1}f^*(\mu)=d'^{-1}g^*(\mu)$, on a $d'^{-1}\varphi\circ g=\psi+c$ où c est une constante. Lorsque $d\neq d'$, quitte à remplacer φ par $\varphi-dd'c/(d-d')$, on peut supposer que $c=0$. Dans tous les cas, on peut appliquer la proposition 1 pour la fonction ψ. On obtient $\delta_f\circ\delta_g=\delta_g\circ\delta_f$ et

$\delta_f^{d/m} = \delta_g^{d'/m}$ où m est le plus grand diviseur commun de d et d'. D'après la proposition 2, on a:

Corollaire 3 *Il existe un polynôme Q de degré m et des polynômes f_0, g_0 tels que $f = f_0 \circ Q$, $g = g_0 \circ Q$ et $(d/m)^{-1} f_0^*(\mu) = (d'/m)^{-1} g_0^*(\mu)$. En particulier, si d' divise d, il existe un polynôme P de degré d/d' tel que $f = P \circ g$ et $d^{-1}d'P^*(\mu) = \mu$.*

3 Endomorphisme polynomial $\mathcal{D}_{d,d'}$

Soient μ_0 une mesure de probabilité à support compact de $\mathbb{C}$ et f_0, g_0 deux polynômes de degrés $d > 1$, $d' > 1$ vérifiant $d^{-1} f_0^*(\mu_0) = d'^{-1} g_0^*(\mu_0)$. On suppose que d et d' sont premiers entre eux (*voir* le corollaire 3) et que $d > d'$. Soient $\beta \neq 0$ et $\alpha \neq 0$ les coefficients dominants de f_0 et g_0. On choisit un point a tel que $f_0(a) = g_0(a)$. Soit $b := f_0(a) = g_0(a)$. Quitte à remplacer f_0 par $\sigma_1 \circ f_0 \circ \sigma_2$, g_0 par $\sigma_1 \circ g_0 \circ \sigma_2$ et μ_0 par $(\sigma_1)_*(\mu_0)$ on peut supposer que $a = b = 0$ et $\beta = 1$ où $\sigma_2(z) := Az + a$, $\sigma_1(z) := A^{-d}\beta^{-1}(z - b)$ et $A \in \mathbb{C}^*$. Soit φ la fonction subharmonique vérifiant $i\partial\overline{\partial}\varphi = \mu_0$ et $d^{-1}\varphi \circ f_0 = d'^{-1}\varphi \circ g_0$. Posons $\varphi_0(z) := \max(0, \varphi(z))$, $\varphi_{-1} := d^{-1}\varphi_0 \circ f_0$, $E_0 := \varphi_0^{-1}(0)$ et $E_{-1} := f_0^{-1}(E_0)$. Alors φ_0 est subharmonique; $\varphi_{-1} = d'^{-1}\varphi_0 \circ g_0$ et $E_{-1} = g_0^{-1}(E_0)$. Comme φ tend vers l'infini quand $z \to \infty$, E_0 est compact. Alors φ_0 est la fonction de Green de $\mathbb{P}^1 \setminus E_0$ avec un seul pôle en ∞. On en déduit que E_0 est de capacité logarithmique positive (*voir* par exemple, [16, III.8]).

Notons $\Sigma(d, d', \alpha)$ l'ensemble des couples (f, g) où f (resp. g) est un polynôme de degré d (resp. d') à coefficient dominant 1 (resp. α) qui s'annule en 0.

Lemme 1 *Il existe un couple unique $(f_1, g_1) \in \Sigma(d, d', \alpha^d)$ et un compact E_1 de capacité logarithmique positive tels que $f_1 \circ g_0 = g_1 \circ f_0$ et tels que $E_0 = f_1^{-1}(E_1) = g_1^{-1}(E_1)$. De plus, on a $\mathcal{C}_{f_1} = g_0(\mathcal{C}_{f_0})$ et $\mathcal{C}_{g_1} = f_0(\mathcal{C}_{g_0})$.*

Preuve— D'après le corollaire 3 et la proposition 2, il existe un polynôme Φ de degré dd' et des polynômes f_1 et f_2 tels que $\Phi = f_1 \circ g_0 = g_1 \circ f_0$. Quitte à remplacer Φ, f_1 et g_1 par $\sigma \circ \Phi$, $\sigma \circ f_1$ et $\sigma \circ g_1$, on peut supposer que $\Phi(0) = 0$ et que le coefficient dominant de Φ soit α^d où σ est un certain polynôme linéaire. On a alors $(f_1, g_1) \in \Sigma(d, d', \alpha^d)$.

Montrons qu'au voisinage de ∞, δ_{f_1} préserve les lignes de niveau de φ_0. Soient a_1 et a_2 suffisamment proches de ∞ tels que $f_1(a_1) = f_1(a_2)$. Il

faut prouver que $\varphi_0(a_1) = \varphi_0(a_2)$. Il existe b_1 et b_2 tels que $g_0(b_1) = a_1$ et $g_0(b_2) = (a_2)$. Alors $\Phi(b_1) = \Phi(b_2)$. Par construction de Φ (*voir* la preuve de la proposition 2), il existe m et n tels que $b_1 = \delta_{f_0}^m \circ \delta_{g_0}^n(b_2)$. Comme $\varphi_{-1} = d^{-1}\varphi_0 \circ f_0 = d'^{-1}\varphi_0 \circ g_0$, les applications δ_{f_0} et δ_{g_0} préservent les lignes de niveau de φ_{-1}. D'où $\varphi_{-1}(b_1) = \varphi_{-1}(b_2)$. On obtient

$$\varphi_0(a_1) = \varphi_0 \circ g_0(b_1) = d'\varphi_{-1}(b_1) = d'\varphi_{-1}(b_2) = \varphi_0 \circ g_0(b_2) = \varphi_0(a_1).$$

Alors au voisinage de ∞, δ_{f_1} préserve les lignes de niveau de φ_0, i.e. les lignes de niveau de φ_0 sont réunions de fibres de f_1. Comme φ_0 est harmonique dans $\mathbb{C} \setminus E_0 = \mathbb{C} \setminus \varphi_0^{-1}(0)$, elle est réelle analytique dans $\mathbb{C} \setminus E_0$. Par analyticité, $\mathbb{C} \setminus E_0$ est une réunion de fibres de f_1. Par conséquent, E_0 est une réunion de fibres de f_1. Posons $E_1 := f_1(E_0)$. Alors $E_0 = f_1^{-1}(E_1)$. Il est clair que E_1 est de capacité logarithmique positive. Les relations $f_1 \circ g_0 = g_1 \circ f_0$ et $f_0^{-1}(E_0) = g_0^{-1}(E_0)$ entraînent $g_1^{-1}(E_1) = E_0$. Les polynômes f_1 et g_1 sont uniques car la fonction Φ est unique (*voir* la preuve de la proposition 2). D'après la proposition 2, on a $\mathcal{C}_{f_1} = g_0(\mathcal{C}_{f_0})$ et $\mathcal{C}_{g_1} = f_0(\mathcal{C}_{g_0})$.

$\square$

Remarque 1 1. On peut construire les couples $(f_k, g_k) \in \Sigma(d, d', \alpha^{d^k})$ et les compacts E_k tels que $f_k \circ g_{k-1} = g_k \circ f_{k-1}$ et $E_{k-1} = f_k^{-1}(E_k) = g_k^{-1}(E_k)$.

2. On fixe un $k \geq 1$ et un $m \geq 0$. On pose $\tilde{d} := d^k$, $\tilde{d}' := d'^k$, $\tilde{\alpha} := \alpha^{d^m(d^{k-1}+d^{k-2}d'+\cdots+d'^{k-1})}$, $\tilde{f}_i := f_{ik+k+m-1} \circ \cdots \circ f_{ik+m}$, $\tilde{g}_i := g_{ik+k+m-1} \circ \cdots \circ g_{ik+m}$, $\tilde{E}_i := E_{ik+k+m-1}$ pour $i = 0$ ou 1. Alors $(\tilde{f}_0, \tilde{g}_0) \in \Sigma(\tilde{d}, \tilde{d}', \tilde{\alpha})$ et $(\tilde{f}_1, \tilde{g}_1) \in \Sigma(\tilde{d}, \tilde{d}', \tilde{\alpha}^{\tilde{d}})$. On vérifie facilement que $\tilde{f}_1 \circ \tilde{g}_0 = \tilde{g}_1 \circ \tilde{f}_0$ et que $\tilde{E}_0 = \tilde{f}_1^{-1}(\tilde{E}_1) = \tilde{g}_1^{-1}(\tilde{E}_1)$. Par l'unicité, $(\tilde{f}_1, \tilde{g}_1)$ est le couple que l'on peut construire comme dans le lemme 1 mais pour les polynômes $\tilde{f}_0$ et $\tilde{g}_0$.

On remarque qu'un couple $(f, g) \in \Sigma(d, d', \alpha)$ est déterminé uniquement par les points critiques de f et de g. Notons $\Pi_{d,d',\alpha} : \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^{d'-1} \longrightarrow \Sigma(d, d', \alpha)$ l'application qui associe un point $(x, y) = (x_1, \ldots, x_{d-1}, y_1, \ldots, y_{d'-1})$ le couple $(f, g) \in \Sigma(d, d', \alpha)$ vérifiant $\mathcal{C}_f = \{x_1, \ldots, x_{d-1}\}$ et $\mathcal{C}_g = \{y_1, \ldots, y_{d'-1}\}$. Cette application définit un revêtement ramifié au-dessus de $\Sigma(d, d', \alpha)$. On définit l'application $\mathcal{D}_{d,d'} : \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^{d'-1} \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^{d'-1} \times \mathbb{C}^*$ par:

$$\mathcal{D}_{d,d'}(x, y, \alpha) := (g(x_1), \ldots, g(x_{d-1}), f(y_1), \ldots, f(y_{d'-1}), \alpha^d)$$

où $(f, g) := \Pi_{d,d',\alpha}(x, y)$. Les polynômes f et g sont déterminés par les formules explicites suivantes:

$$f(z) = \frac{1}{d}\int_0^z (t - x_1)\ldots(t - x_{d-1})dt$$

et

$$g(z) = \frac{\alpha^d}{d'}\int_0^z (t - y_1)\ldots(t - y_{d'-1})dt.$$

Il est clair que $\mathcal{D}_{d,d'}$ est un endomorphisme polynomial.

Remarque 2 1. D'après le lemme précédent, si $\Pi_{d,d',\alpha}(x, y) = (f_0, g_0)$ on a $\Pi_{d,d',\alpha^d}(x^*, y^*) = (f_1, g_1)$ où $(x^*, y^*, \alpha^d) := \mathcal{D}_{d,d'}(x, y, \alpha)$.

2. D'après la remarque 1, si $\Pi_{\tilde{d},\tilde{d}',\tilde{\alpha}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{f}_0, \tilde{g}_0)$ on a $\Pi_{\tilde{d},\tilde{d}',\tilde{\alpha}}(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) = (\tilde{f}_1, \tilde{g}_1)$ où $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{\alpha}^{\tilde{d}}) := \mathcal{D}_{\tilde{d},\tilde{d}'}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha})$.

4 Ensemble invariant $\mathcal{N}(d, d')$

Notons $\mathcal{M}(d, d')$ l'ensemble des points $(x, y, \alpha) \in \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^{d'-1} \times \mathbb{C}^*$ vérifiant $f^* \circ g = g^* \circ f$ où $(f, g) := \Pi_{d,d',\alpha}(x, y)$, $(x^*, y^*, \alpha^d) := \mathcal{D}_{d,d'}(x, y, \alpha)$ et $(f^*, g^*) := \Pi_{d,d',\alpha^d}(x^*, y^*)$. Notons $\mathcal{N}(d, d')$ l'ensemble des $(x, y, \alpha) \in \mathcal{M}(d, d')$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

1. $\mathcal{P}(d, d')$: pour tout $n \geq 0$, on a $\mathcal{D}^n_{d,d'}(x, y, \alpha) \in \mathcal{M}(d, d')$.

2. Pour tous $k \geq 1$ et $m \geq 0$, si $\Pi_{\tilde{d},\tilde{d}',\tilde{\alpha}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{f}, \tilde{g})$ alors $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha})$ vérifie la condition $\mathcal{P}(\tilde{d}, \tilde{d}')$ où $(x_n, y_n, \alpha_n) := \mathcal{D}^n_{d,d'}(x, y, \alpha)$, $(f_n, g_n) := \Pi_{d,d',\alpha_n}(x_n, y_n)$, $\tilde{f} := f_{k+m-1} \circ \cdots \circ f_m$, $\tilde{g} := g_{k+m-1} \circ \cdots \circ g_m$, $\tilde{d} := d^k$, $\tilde{d}' := d'^k$ et $\tilde{\alpha} := \alpha^{d^m(d^{k-1}+d^{k-2}d'+\cdots+d'^{k-1})}$ (*voir* la remarque 2).

Alors $\mathcal{N}(d, d')$ est un sous-ensemble algébrique *faiblement invariant* par $\mathcal{D}_{d,d'}$ i.e. $\mathcal{D}_{d,d'}(\mathcal{N}(d, d')) \subset \mathcal{N}(d, d')$. De plus, $\mathcal{D}^n_{d,d'}(\mathcal{N}(d, d'))$ est faiblement invariant par $\mathcal{D}_{d,d'}$ pour tout $n \geq 0$.

Soient f_0, g_0, α et E_0 vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent. D'après le lemme 1 et les remarques 1, 2, on a $(x, y, \alpha) \in \mathcal{N}(d, d')$ pour tout (x, y) vérifiant $\Pi_{d,d',\alpha}(x, y) = (f_0, g_0)$.

Nous construisons maintenant deux sous-ensembles $\mathcal{C}_1(d, d')$ et $\mathcal{C}_2(d, d')$ de $\mathcal{N}(d, d')$ grâce à des exemples précis sur f_0, g_0, α et E_0. Par suite, on montre que $\mathcal{N}(d, d') = \mathcal{C}_1(d, d') \cup \mathcal{C}_2(d, d')$.

Soient σ_1, σ_2 deux polynômes linéaires, $a \neq 0$ et $\alpha \neq 0$ tels que $(f,g) \in \Sigma(d,d',\alpha)$ où $f(z) := \sigma_1 \circ (z^d) \circ \sigma_2$ et $g(z) := \sigma_1 \circ (az^{d'}) \circ \sigma_2$. On a $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$ pour $E := \sigma_1(\{z \in \mathbb{C} : |z| = |a|^{d/(d-d')}\})$. Par conséquent, $(x,y,\alpha) \in \mathcal{N}(d,d')$ pour tout (x,y) vérifiant $\Pi_{d,d',\alpha}(x,y) = (f,g)$. On note $\mathcal{C}_1(d,d')$ l'ensemble de ces points (x,y,α).

Notons T_k le polynôme de Tchebychev de degré k défini par $\mathrm{T}(\cos z) := \cos kz$. On sait que l'ensemble de Julia de T_k est l'intervalle $[-1,1]$, que le coefficient dominant de T_k est égal à 2^{k-1} et que les points critiques de T_k sont les points $\cos t \neq \pm 1$ avec $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sin kt = 0$. Soient σ_1, σ_2 deux polynômes linéaires et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $(f,g) \in \Sigma(d,d',\alpha)$ où $f := \sigma_1 \circ (\pm \mathrm{T}_d) \circ \sigma_2$, $g := \sigma_1 \circ (\pm \mathrm{T}_{d'}) \circ \sigma_2$. Posons $E := \sigma_1([-1,1])$. Alors $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$. On en déduit que $(x,y,\alpha) \in \mathcal{N}(d,d')$. Notons $\mathcal{C}_2(d,d')$ l'ensemble de tels points (x,y,α).

Lemme 2 *$\mathcal{C}_1(d,d')$ et $\mathcal{C}_2(d,d')$ sont des courbes algébriques réductibles dont aucune composante n'est incluse dans un hyperplan du type $\{\alpha = constante\}$.*

Preuve— Soient $\sigma_1(z) = a_1 z + b_1$, $\sigma_2(z) = a_2 z + b_2$ et f, g, α, x, y définis ci-dessus.

Pour la courbe $\mathcal{C}_1(d,d')$, comme $(f,g) \in \Sigma(d,d',\alpha)$, on obtient les relations suivantes: $a_1 a_2^d = 1$, $a_1 a a_2^{d'} = \alpha$ et $a_1 b_2^d + b_1 = a_1 a b_2^{d'} + b_1 = 0$. On a également, $x = (-b_2/a_2, \ldots, -b_2/a_2)$ et $y = (-b_2/a_2, \ldots, -b_2/a_2)$. On obtient facilement que $b_2 = 0$ ou $\alpha = (b_2/a_2)^{d-d'}$. Ceci montre que $\mathcal{C}_1$ est une courbe algébrique réductible et qu'aucune de ses composantes n'est incluse dans $\{\alpha = \text{constante}\}$.

Pour la courbe $\mathcal{C}_2(d,d')$, on obtient $a_1 2^{d-1} a_2^d = 1$, $a_1 2^{d'-1} a_2^{d'} = \alpha$ et $\pm a_1 \mathrm{T}_d(b_2) + b_1 = \pm a_1 \mathrm{T}_{d'}(b_2) + b_1 = 0$. On a $\{x_1, \ldots, x_{d-1}\} = \sigma_2^{-1}(\mathcal{C}_{\mathrm{T}_{d_2}})$, $\{y_1, \ldots, y_{d'-1}\} = \sigma_2^{-1}(\mathcal{C}_{\mathrm{T}_{d_2}})$. On remarque que b_2 est une solution de l'équation $\pm \mathrm{T}_d(z) = \pm \mathrm{T}_{d'}(z)$. Cette équation n'a qu'un nombre fini de solution. Les autres nombres a_1 et a_2 (resp. b_1) s'écrivent en fonction de α (resp. de α et de b_2). Par conséquent, $\mathcal{C}_2(d,d')$ est une courbe algébrique dont aucune composante n'est incluse dans un hyperplan du type $\{\alpha = \text{constante}\}$.

$\square$

Lemme 3 1. $\mathcal{D}_{d,d'}^{-1}(\mathcal{C}_1(d,d')) \cap \mathcal{N}(d,d') \subset \mathcal{C}_1(d,d')$.

2. $\mathcal{D}_{d,d'}^{-1}(\mathcal{C}_2(d,d')) \cap \mathcal{N}(d,d') \subset \mathcal{C}_2(d,d')$.

Preuve— **1.** Soit $(x,y,\alpha) \in \mathcal{D}_{d,d'}^{-1}(\mathcal{C}_1(d,d')) \cap \mathcal{N}(d,d')$. Posons $(f,g) := \Pi_{d,d',\alpha}(x,y)$, $(x_1,y_1,\alpha_1) := \mathcal{D}_{d,d'}(x,y,\alpha)$ et $(f_1,g_1) := \Pi_{d,d',\alpha_1}(x_1,y_1)$. Comme $(x_1,y_1,\alpha_1) \in \mathcal{C}_1(d,d')$, il existe des polynômes linéaires σ_1, σ_2 et une constante non nulle a tels que $f_1(z) = \sigma_1([\sigma_2(z)]^d)$ et $g_1 = \sigma_1(a[\sigma_2(z)^{d'}])$. Comme $(x,y,\alpha) \in \mathcal{N}(d,d')$, on a $f_1 \circ g = g_1 \circ f$. Posons $f^* := \sigma_2 \circ f$ et $g^* := \sigma_2 \circ g$. Alors $a[f^*(z)]^{d'} = [g^*(z)]^d$. Posons $\Phi(z) := a[f^*(z)]^{d'} = [g^*(z)]^d$. Soit λ une racine de Φ. Alors la multiplicité de λ est divisible par d et par d'. Comme d et d' sont premiers entre eux, la multiplicité de λ est divisible par dd'. D'autre part, $\deg \Phi = dd'$. On déduit que λ est la seule racine de Φ. Il est également la seule racine de f^* et de g^*. Alors il existe un polynôme linéaire σ et un $b \in \mathbb{C}$ tels que $f^*(z) = [\sigma(z)]^d$ et $g^*(z) = b[\sigma(z)]^{d'}$. D'où $(x,y,\alpha) \in \mathcal{C}_1(d,d')$.

2. De même manière, on se ramène à une équation du type $\mathrm{T}_d \circ g^* = \pm\mathrm{T}_{d'} \circ f^*$. Il faut montrer qu'il existe un polynôme linéaire σ tel que $f^* = \pm\mathrm{T}_d \circ \sigma$ et $g^* = \pm\mathrm{T}_{d'} \circ \sigma$. Il est clair que ${f^*}^{-1}([-1,1]) = {g^*}^{-1}([-1,1])$. On déduit de la définition de $\mathcal{D}_{d,d'}$ que $g^*(\mathcal{C}_{f^*}) = \mathcal{C}_{\mathrm{T}_d}$. Par conséquent, les points critiques de f^* sont tous de multiplicité 1. De même pour g^*.

Pour $|z|$ suffisamment grand on a $\mathcal{F}_{f^*}(z) \cap \mathcal{F}_{g^*}(z) = \{z\}$. En effet, utilisant les développements asymptotiques de δ_{f^*} et δ_{g^*}, on obtient pour tous $1 \leq n \leq d-1$ et $1 \leq m \leq d'-1$:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\delta_{f^*}^m(z)}{\delta_{g^*}^n(z)} = \exp(2m\pi i/d - 2n\pi i/d') \neq 0$$

car d et d' sont premiers entre eux. Par analyticité, pour un z générique $\mathcal{F}_{f^*}(z) \cap \mathcal{F}_{g^*}(z) = \{z\}$. Soit $p \in \mathcal{C}_{f^*}$. Montrons que $f^*(p) = \pm 1$. Supposons que $f^*(p) = a \neq \pm 1$. On sait que $g^*(\mathcal{C}_{f^*}) = \mathcal{C}_{\mathrm{T}_d} \subset [-1,1]$ et ${f^*}^{-1}([-1,1]) = {g^*}^{-1}([-1,1])$. D'où $a \in]-1,1[$. Alors au voisinage de p, ${f^*}^{-1}([-1,1])$ est la réunion de deux courbes réelles analytiques qui se coupent en p. Par conséquent, p est un point critique de g^*. Comme δ_{f^*} et δ_{g^*} commutent, leurs prolongements analytiques commutent aussi au voisinage de p. On en déduit que $\mathcal{F}_{f^*}(z) \cap \mathcal{F}_{g^*}(z)$ contient au moins deux éléments pour tout z suffisamment proche de p. C'est une contradiction. Donc $f^*(p) = \pm 1$. De même $g^*(q) = \pm 1$ pour $q \in \mathcal{C}_{g^*}$.

Le fait que f^* est de degré d implique que pour d impair ${f^*}^{-1}(1)$ est une réunion de $(d-1)/2$ points critiques et d'un point non critique; pour d pair ${f^*}^{-1}(1)$ est la réunion de $d/2$ points critiques ou la réunion de $d/2-1$ points critiques avec deux points non critiques. De même pour ${f^*}^{-1}(-1)$. Quitte à remplacer f^*, g^* par $\pm f^* \circ \sigma$ et $g^* \circ \sigma$ pour un certain polynôme

linéaire σ, on peut supposer que ± 1 ne sont pas critiques pour f et que pour d impair $f^*(1) = 1$, $f^*(-1) = -1$ et pour d pair $f^*(1) = f^*(-1) = 1$. On remarque qu'au voisinage de ± 1, $f^{*-1}([-1,1])$ est un arc réel analytique. Par conséquent, $g^*(\pm 1) = \pm 1$ et ± 1 ne sont pas critiques pour g^*. Quitte à remplacer g^* par $\pm g^*$, on peut supposer que pour d' impair $g^*(1) = 1$, $g^*(-1) = -1$ et pour d' pair $g^*(1) = g^*(-1) = 1$.

Alors il existe des polynômes P, Q tels que pour d impair $f^*(z) + 1 = (z+1)P^2(z)$, $f^*(z) - 1 = (z-1)Q^2(z)$ et pour d pair $f^*(z) + 1 = P^2(z)$, $f^*(z) - 1 = (z-1)(z+1)Q^2(z)$. Posons $\psi(z) := (z + z^{-1})/2$. On vérifie facilement qu'il existe une fonction rationnelle $R(z)$ telle que:

$$\frac{f^* + 1}{f^* - 1} \circ \psi(z) = R^2(z).$$

On en déduit que $f^*(z) \circ \psi = (F + F^{-1})/2$ où $F := (R+1)/(R-1)$. On a donc $\psi^{-1} \circ f^* \circ \psi = F^{\pm 1}$. Ceci implique que $\deg F = d$. De même, il existe une fonction rationnelle G de degré d' telle que $\psi^{-1} \circ g^* \circ \psi = G^{\pm 1}$. D'autre part, $\psi^{-1} \circ \mathrm{T}_d \circ \psi(z) = z^{\pm d}$ et $\psi^{-1} \circ \mathrm{T}_{d'} \circ \psi(z) = z^{\pm d'}$. On déduit de la relation $\mathrm{T}_d \circ g^* = \pm \mathrm{T}_{d'} \circ f^*$ que $F^{\pm d'} = \pm G^{\pm d}$. Alors comme dans la partie précédente, les multiplicités des zéros et des pôles de $F^{\pm d'} = \pm G^{\pm d}$ sont divisibles par dd'. Or c'est une fonction de degré dd'. D'où $F(z) = Az^{\pm d}$ et $G(z) = Bz^{\pm d'}$. Le fait que $f^*(1) = g^*(1) = 1$ entraîne $A = B = 1$. D'où $f^* = \mathrm{T}_d$ et $g^* = \mathrm{T}_{d'}$.

□

Lemme 4 *Soit $(x, y, \alpha) \in \mathcal{N}(d, d')$ un point prépériodique de $\mathcal{D}_{d,d'}$, i.e. $\mathcal{D}^{k+m}_{d,d'}(x, y, \alpha) = \mathcal{D}^m_{d,d'}(x, y, \alpha)$ pour certains $k \geq 1$ et $m \geq 0$. Alors (x, y, α) appartient à $\mathcal{C}_1(d, d') \cup \mathcal{C}_2(d, d')$.*

Preuve— On utilise les notations de la définition de l'ensemble $\mathcal{N}(d, d')$. Soient $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{\alpha}^*) := \mathcal{D}_{\tilde{d},\tilde{d}'}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha})$ et $(\tilde{f}^*, \tilde{g}^*) := \Pi_{\tilde{d},\tilde{d}',\tilde{\alpha}}(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$. Comme $\mathcal{D}^{k+m}_{d,d'}(x, y, \alpha) = \mathcal{D}^m_{d,d'}(x, y, \alpha)$, on a $\tilde{f}^* = \tilde{f}$ et $\tilde{g}^* = \tilde{g}$ (*voir* la remarque 2). Par définition de $\mathcal{N}(\tilde{d}, \tilde{d}')$, on a $\tilde{f}^* \circ \tilde{g} = \tilde{g}^* \circ \tilde{f}$. D'où $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Cette équation a été résolue par Fatou et Julia [6, 8, 13, 5]. Dans notre cas, $\tilde{d} > 1$ et $\tilde{d}' > 1$ sont premiers entre eux. D'après le théorème de Fatou-Julia, il existe un polynôme linéaire σ_1 tel que l'une des conditions suivantes soit vraie:

1. $\sigma_1 \circ \tilde{f} \circ \sigma_1^{-1} = z^{\tilde{d}}$ et $\sigma_1 \circ \tilde{g} \circ \sigma_1^{-1} = az^{\tilde{d}'}$ où $a \neq 0$ est une constante.
2. $\sigma_1 \circ \tilde{f} \circ \sigma_1^{-1} = \pm \mathrm{T}_{\tilde{d}}$ et $\sigma_1 \circ \tilde{g} \circ \sigma_1^{-1} = \pm \mathrm{T}_{\tilde{d}'}$.

Considérons le second cas, le premier cas sera traité de même manière. On remarque que $\mathrm{T}_{rs} = \mathrm{T}_r \circ \mathrm{T}_s$. En particulier, $\mathrm{T}_{\tilde{d}} = \mathrm{T}_{\tilde{d}/d} \circ \mathrm{T}_d$. Le fait que $\tilde{f} = f_{k+m-1} \circ \cdots \circ f_m$ implique

$$(\sigma_1 \circ f_{k+m-1} \circ \sigma_1^{-1}) \circ \cdots (\sigma_1 \circ f_m \circ \sigma_1^{-1}) = \sigma_1 \circ \tilde{f} \circ \sigma^{-1} = \pm \mathrm{T}_{\tilde{d}}.$$

D'après la proposition 1, il existe un polynôme linéaire σ_2 tel que $\sigma_1 \circ f_m \circ \sigma_1^{-1} = \sigma_2 \circ \mathrm{T}_d$. De même, il existe σ_2' tel que $\sigma_1 \circ g_m \circ \sigma_1^{-1} = \sigma_2' \circ \mathrm{T}_{d'}$. Alors $f_m = \sigma_3 \circ \mathrm{T}_d \circ \sigma_1$ et $g_m = \sigma_3' \circ \mathrm{T}_{d'} \circ \sigma_1$ où $\sigma_3 := \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$ et $\sigma_3' := \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$. On sait que pour d et d' premiers entre eux l'ensemble critique de T_d (resp. de $\mathrm{T}_{d'}$) est invariant par $\mathrm{T}_{d'}$ (resp. par T_d). Par construction de $\mathcal{D}_{d,d'}$, on a

$$\mathcal{C}_{f_{m+1}} = g_m(\mathcal{C}_{f_m}) = \sigma_3' \circ \mathrm{T}_{d'}(\mathcal{C}_{\mathrm{T}_d}) = \sigma_3'(\mathcal{C}_{\mathrm{T}_d}).$$

Alors il existe un polynôme linéaire σ_4 tel que $f_{m+1} = \sigma_4 \circ \mathrm{T}_d \circ {\sigma_3'}^{-1}$. De même, il existe un polynôme linéaire σ_4' tel que $g_{m+1} = \sigma_4' \circ \mathrm{T}_{d'} \circ \sigma_3^{-1}$.

Comme on a montré ci–dessus pour f_m et g_m, il suffit de remplacer m par $m+1$ afin d'obtenir $f_{m+1} = \sigma_6 \circ \mathrm{T}_d \circ \sigma_5$ et $g_{m+1} = \sigma_6' \circ \mathrm{T}_d \circ \sigma_5$ où σ_5, σ_6 et σ_6' sont linéaires. On déduit des quatres dernières égalités que l'ensemble critique de T_d (resp. de $\mathrm{T}_{d'}$) est invariant par $\sigma_5 \circ \sigma_3'$ (resp. par $\sigma_5 \circ \sigma_3$). D'où $\sigma_5 \circ \sigma_3'(z) = \pm z$ et $\sigma_5 \circ \sigma_3(z) = \pm z$. Par conséquent, $\sigma_3'(z) = \sigma_3(\pm z)$ et donc $f_m = \sigma_3 \circ \mathrm{T}_d \circ \sigma_1$ et $g_m = \sigma_3 \circ (\pm \mathrm{T}_{d'}) \circ \sigma_1$. Ceci signifie que $(f_m, g_m, \alpha_m) \in \mathcal{C}_2(d,d')$. D'après le lemme 3, $(f,g,\alpha) \in \mathcal{C}_2(d,d')$ car $(f,g,\alpha) = (f_0, g_0, \alpha_0)$.

□

Proposition 3 *On a $\mathcal{N}(d,d') = \mathcal{C}_1(d,d') \cup \mathcal{C}_2(d,d')$.*

Soit S un sous-ensemble algébrique périodique de $\mathcal{N}(d,d')$, i.e. $\mathcal{D}^n_{d,d'}(S) = S$ pour un certain $n \geq 1$. On montre que $S \subset \mathcal{C}_1(d,d') \cup \mathcal{C}_2(d,d')$. Soit a une racine d'ordre $d^{m-1} - 1$ de l'unité. On pose K_a l'ensemble des points (x,y,a). Alors K_a est périodique de période m.

Lemme 5 *Pour tout a, l'ensemble $S \cap K_a$ est fini.*

Preuve— Soit V une composante irréductible, périodique de $S \cap K_a$. Il faut montrer que $\dim V = 0$. Supposons par l'absurde que $\dim V \geq 1$. Pour simplifier les notations, on suppose par la suite que $a = 1$ et on pose $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{d,d'}$. Notons $s := (x, y) = (x_1, \ldots, x_{d-1}, y_1, \ldots, y_{d'-1})$ les coordonnées de $K_a \simeq \mathbb{C}^{d+d'-2}$. Comme $\mathcal{D}$ est polynomial, elle se prolonge en une application méromorphe de $\mathbb{P}^{d+d'-2}$ dans lui-même. Notons encore $\mathcal{D}$ ce prolongement. Soit $L := \mathbb{P}^{d+d'-2} \setminus K_a$ l'hyperplan à l'infini muni des coordonnées homogènes $w := [x_1 : \cdots : x_{d-1} : y_1 : \cdots : y_{d'-1}]$. On pose $(f, g) := \Pi_{d,d',a}(s)$. Les formules explicites des polynômes f et g sont données dans le paragraphe précédent. On remarque que $f(y_i)$ (resp. $g(x_i)$) est un polynôme homogène de degré d (resp. d') en variables x et y. Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que $|f(y_j)| \leq c\lambda^d$ et $|g(x_i)| \leq c\lambda^{d'}$ où

$$\lambda := \max\left(\max_{1\leq\nu\leq d-1} |x_\nu|, \max_{1\leq\nu\leq d'-1} |y_\nu|\right).$$

Comme $d > d'$, l'ensemble d'indétermination I de $\mathcal{D}$ est égal à

$$I = \{w \in L :\ f(y_1) = \cdots = f(y_{d'-1}) = 0\}$$

et l'ensemble $X := \mathcal{D}(L \setminus I)$ vérifie

$$X \subset \{w \in L :\ x_1 = \cdots = x_{d-1} = 0\}.$$

Comme $\dim V \geq 1$, l'intersection $\overline{V} \cap L \neq \emptyset$. Comme V est prépériodique, $\overline{V} \cap (I \cup X) \neq \emptyset$. Soient $s^{(n)} = (x^{(n)}, y^{(n)}) \in V$ tendant vers un point $w_0 \in \overline{V} \cap (I \cup X)$ quand $n \to +\infty$. On pose $(f_n, g_n) := \Pi_{d,d',a}(s^{(n)})$, $\overline{s}^{(n)} := \mathcal{D}(s^{(n)})$ et $(\overline{f}_n, \overline{g}_n) := \Pi_{d,d',a}(\overline{s}^{(n)})$. Par définition de $\mathcal{D}_{d,d'}$, on a $\mathcal{C}_{\overline{f}_n} = g_n(\mathcal{C}_{f_n})$ et $\mathcal{C}_{\overline{g}_n} = f_n(\mathcal{C}_{g_n})$. Par définition de $\mathcal{N}(d, d')$, on a $\overline{f}_n \circ g_n = \overline{g}_n \circ f_n$. Soient

$$\lambda_n = \max\left(\max_{1\leq\nu\leq d-1} |x_\nu^{(n)}|, \max_{1\leq\nu\leq d'-1} |y_\nu^{(n)}|\right).$$

Alors $|\overline{x}_\nu^{(n)}| \leq c\lambda_n^{d'}$ et $|\overline{y}_\nu^{(n)}| \leq c\lambda_n^d$. On pose $\sigma_1(z) := \lambda z$, $\sigma_2(z) := \lambda^{d-1} z$, $\sigma_3(z) := \lambda^{d'-1} z$ et $\sigma_4(z) := \lambda^{(d-1)(d'-1)} z$. On pose également $f_n^* := \sigma_2^{-1} \circ f_n \circ \sigma_1$, $g_n^* := \sigma_3^{-1} \circ g_n \circ \sigma_1$, $\overline{f}_n^* := \sigma_4^{-1} \circ \overline{f}_n \circ \sigma_3$ et $\overline{g}_n^* := \sigma_4^{-1} \circ \overline{g}_1 \circ \sigma_2$. Alors $\overline{f}_n^* \circ g_n^* = \overline{g}_n^* \circ f_n^*$, $(f_n^*, g_n^*) \in \Sigma(d, d', 1)$ et $(\overline{f}_n^*, \overline{g}_n^*) \in \Sigma(d, d', 1)$. On a aussi $\mathcal{C}_{f_n^*} = \sigma_1^{-1}(\mathcal{C}_{f_n}) = \sigma_1^{-1}\{x_1^{(n)}, \ldots, x_{d-1}^{(n)}\}$, $\mathcal{C}_{g_n^*} = \sigma^{-1}\{y_1^{(n)}, \ldots, y_{d'-1}^{(n)}\}$, $\mathcal{C}_{\overline{f}^*} = \sigma_3^{-1}\{\overline{x}_1^{(n)}, \ldots, \overline{x}_{d-1}^{(n)}\}$ et $\mathcal{C}_{\overline{g}^*} = \sigma_2^{-1}\{\overline{y}_1^{(n)}, \ldots, \overline{y}_{d'-1}^{(n)}\}$. Par définition de

λ_n et des σ_i, les points critiques de f^* et g^* (resp. de $\overline{f}^*$ et $\overline{g}^*$) sont de modules majorés par 1 (resp. par c). De plus, au moins l'un des points critiques de f^* ou de g^* est de module 1. Le fait que $(f^*, g^*) \in \Sigma(d, d', 1)$ et $(\overline{f}^*, \overline{g}^*) \in \Sigma(d, d', 1)$ entraîne que les coefficients des polynômes f_n^*, g_n^*, $\overline{f}^*_n$ et $\overline{g}_n^*$ sont bornés. On vérifie facilement que $\mathcal{C}_{\overline{f}^*_n} = g_n^*(\mathcal{C}_{f_n^*})$ et $\mathcal{C}_{\overline{g}_n^*} = f_n^*(\mathcal{C}_{g_n^*})$. Soient F, G, $\overline{F}$, $\overline{G}$ quatre polynômes tels que $(F, G, \overline{F}, \overline{G})$ soit adhérent à la suite $(f_n^*, g_n^*, \overline{f}^*_n, \overline{g}_n^*)$. Par continuité, on a $\overline{F} \circ G = \overline{G} \circ F$, $\mathcal{C}_{\overline{F}} = G(\mathcal{C}_F)$ et $\mathcal{C}_{\overline{G}} = F(\mathcal{C}_G)$. De plus, au moins un point critique de F ou de G est de module 1.

Cas 1.– Supposons que $w_0 \in I$. On déduit de la description de I que $\lambda_n^{-d+1}\overline{y}_\nu^{(n)}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Ceci implique que les points critiques de $\overline{G}$ sont tous nuls. D'où $\overline{G}(z) = z^{d'}$ et $[F(z)]^{d'} = \overline{F} \circ G(z)$ car $\overline{F} \circ G = \overline{G} \circ F$. Alors les multiplicités des zéros de $\overline{F} \circ G$ sont divisibles par d'. Comme $d = \deg \overline{F}$ n'est pas divisible par d', il existe au moins une racine a_1 de $\overline{F}$ telle que sa multiplicité α_1 ne soit pas divisible par d'.

Supposons d'abord qu'il existe une autre racine a_2 de $\overline{F}$ dont la multiplicité α_2 n'est pas divisible par d'. Soit b_j un point arbitraire de $G^{-1}(a_j)$ à multiplicité β_j. Alors $\alpha_j\beta_j$ est divisible par d'. Notons α_j' le plus grand diviseur commun de α_j et d'. Notons également $\nu_j = d'/\alpha_j'$. Alors ν_j divise β_j. On en déduit qu'il existe un polynôme non constant K_j tel que $G(z) - a_j = [K_j(z)]^{\nu_j}$. Comme α_j ne divise pas d', on a $\nu_j \geq 2$. On obtient donc $[K_1(z)]^{\nu_1} = [K_2(z)]^{\nu_2} - b^{\nu_2}$ où $b^{\nu_2} = a_2 - a_1 \neq 0$. Ceci implique

$$[K_1(z)]^{\nu_1} = \prod_{j=0}^{\nu_2-1} [K_2(z) - \theta_j b].$$

où $\theta_j := \exp(2j\pi i/\nu_2)$. Les facteurs du membre à droite sont deux à deux premiers entre eux. Par conséquent, il existe des polynômes P_j tels que $K_2(z) - \theta_j b = [P_j(z)]^{\nu_1}$. On a

$$[P_1(z)]^{\nu_1} - [P_0(z)]^{\nu_1} = (\theta_1 - \theta_0)b \neq 0.$$

C'est une contradiction car le membre à gauche se factorise en ν_1 facteurs qui ne sont pas tous constants.

Il reste le cas où a_1 est la seule racine de $\overline{F}$ dont la multiplicité n'est pas divivible par d'. Comme $d = \deg \overline{F}$ et d' sont premiers entre eux, α_1 et d' sont premiers entre eux. Par conséquent, tout point de $G^{-1}(a_1)$ est de multiplicité divisible par d'. Comme $\deg G = d'$ et comme $G \in \Sigma(d, d', 1)$, on a $G(z) =$

$z^{d'}$. On en déduit que $a_1 = 0$. On peut donc écrire $\overline{F}(z) = z^{\alpha_1}[P(z)]^{d'}$ où P est un polynôme unitaire. L'équation $[F(z)]^{d'} = \overline{F} \circ G(z)$ entraîne $F(z) = z^{\alpha_1}P(z^{d'})$. Les égalités suivantes sont obtenues par les calculs de dérivées:

$$F'(z) = z^{\alpha_1 - 1}[\alpha_1 P(z^{d'}) + d' z^{d'} P'(z^{d'})]$$

et

$$\overline{F}'(z) = z^{\alpha_1 - 1}[P(z)]^{d'-1}[\alpha_1 P(z) + d' z P'(z)].$$

Soit a une racine non nulle de F', i.e. une racine de $\alpha_1 P(z^{d'}) + d' z^{d'} P'(z^{d'})$. Alors $\exp(2k\pi i/d')a$ est également une racine de F' pour tout $0 \leq k \leq d'-1$. Comme $\mathcal{C}_{\overline{F}} = G(\mathcal{C}_F)$ et comme $G(z) = z^{d'}$, toute racine de $\overline{F}'$ est du type $a^{d'}$, i.e. une racine de $\alpha_1 P(z) + d' z P'(z)$. De plus, la multiplicité de cette racine est divisible par d'. Soit b une racine de multiplicité $nd' + m$ de $P(z)$ avec $0 \leq m \leq d' - 1$. Alors b est une racine de multiplicité $nd' + m - 1$ de $P'(z)$ et donc de $\alpha_1 P(z) + d' z P'(z)$. Par conséquent, b est une racine de multiplicité $(n'd' + m)(d' - 1) + (nd' + m - 1)$ de $\overline{F}'$. Cette multiplicité n'est pas divisible par d'. C'est impossible. D'où $P(z) = 1$ et $F(z) = z^d$. C'est aussi une contradiction car au moins l'un des points critiques de F ou de G est de module 1.

Cas 2.– Supposons maintenant que $w_0 \in X$. Par la description de X, $\lambda_n^{-1} x_\nu^{(n)}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Par conséquent, les points critiques de f_n^* tendent vers 0. On en déduit que $F(z) = z^d$ et que $\mathcal{C}_{\overline{F}} = G(\mathcal{C}_F) = \{0\}$. On a donc $\overline{F}(z) = z^d$. On obtient alors $\overline{G}(z^d) = [G(z)]^d$. Ceci montre que les racines de $\overline{G}(z^d)$ sont toutes de multiplicité divisible par d. En particulier, toute racine non nulle de $\overline{G}$ est de multiplicité divisible par d. Mais $\deg \overline{G} = d' < d$. Donc $\overline{G}$ n'a pas de racine non nulle. Alors $\overline{G}(z) = z^{d'}$ et donc $G(z) = z^{d'}$. C'est une contradiction car au moins un point critique de F ou de G est de module 1.

$\square$

Fin de la preuve de la proposition 2.– Si $\dim S = 0$, alors S est simplement un point périodique. D'après le lemme 4, $S \subset \mathcal{C}_1(d, d') \cup \mathcal{C}_2(d, d')$.

Si $\dim S \geq 1$, d'après le lemme précédent, $S \cap K_a$ est un ensemble fini pour tout a. Comme S et K_a sont périodiques, $S \cap K_a$ est périodique. Par conséquent, tout point de $S \cap K_a$ est prépériodique. D'après le lemme 4, $S \cap K_a \subset \mathcal{C}_1(d, d') \cup \mathcal{C}_2(d, d')$. Comme S est périodique et comme $\mathcal{D}_{d,d'}$ envoie l'hyperplan $\{\alpha = c\}$ dans l'hyperplan $\{\alpha = c^d\}$, $S \cap K_a$ est non vide sauf peut-être pour un nombre fini de a. On déduit que $\dim S = 1$ et que S coupe

$\mathcal{C}_1(d,d') \cup \mathcal{C}_2(d,d')$ en une infinité de points. D'où $S \subset \mathcal{C}_1(d,d') \cup \mathcal{C}_2(d,d')$. Ceci est vrai pour tout sous-ensemble algébrique périodique de $\mathcal{N}(d,d')$.

Comme $\mathcal{D}^n_{d,d'}(\mathcal{N}(d,d'))$ est faiblement invariant pour tout $n \geq 0$, toute composante de $\mathcal{N}(d,d')$ s'envoie par un $\mathcal{D}^n_{d,d'}$ dans une composante périodique de $\mathcal{N}(d,d')$. Donc elle s'envoie par $\mathcal{D}^n_{d,d'}$ dans $\mathcal{C}_1(d,d') \cup \mathcal{C}_2(d,d')$. D'après le lemme 3, elle est incluse dans $\mathcal{C}_1(d,d') \cup \mathcal{C}_2(d,d')$.

5 Preuves des théorèmes et remarques

Preuve du théorème 1— Soient μ, f et g vérifiant les hypothèses du théorème 1. Si d est divisible par d' ou si d' est divisible par d, d'après le corollaire 3, la condition 1 du théorème 1 est satisfaisante.

Dans le cas contraire, d'après le corollaire 3, on peut supposer que d et d' sont premiers entre eux et que $d > 1$, $d' > 1$. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $d > d'$. Alors d'après les paragraphes 3 et 4, il existe des polynômes linéaires σ_1, σ_2 et un nombre $\alpha \neq 0$ tels que

$$(\sigma_1 \circ f \circ \sigma_2, \sigma_1 \circ g \circ \sigma_2) \in \Pi_{d,d',\alpha}(\mathcal{N}(d,d')).$$

D'après la proposition 3, $\mathcal{N}(d,d') = \mathcal{C}_1(d,d') \cup \mathcal{C}_2(d,d')$. Par définition de $\mathcal{C}_1(d,d')$ et $\mathcal{C}_2(d,d')$, il existe des polynômes linéaires σ_3 et σ_4 tels que l'une des conditions suivantes soit vraie:

1. $\sigma_3 \circ f \circ \sigma_4(z) = z^d$ et $\sigma_3 \circ g \circ \sigma_4(z) = az^{d'}$ où $a \neq 0$ est une constante.

2. $\sigma_3 \circ f \circ \sigma_4 = \pm \mathrm{T}_d$ et $\sigma_3 \circ g \circ \sigma_4 = \pm \mathrm{T}_{d'}$.

Posons $Q := \sigma_3^{-1} \circ \sigma_4^{-1}$, $f_0 := f \circ Q^{-1}$ et $g_0 := g \circ Q^{-1}$. On a $f = f_0 \circ Q$ et $g = g_0 \circ Q$. On a aussi $f_0 = \sigma_3^{-1} \circ z^d \circ \sigma_3$, $g_0 = \sigma_3^{-1} \circ (az^{d'}) \circ \sigma_3$ ou $f_0 = \sigma_3^{-1} \circ (\pm \mathrm{T}_d) \circ \sigma_3$, $g_0 = \sigma_3^{-1} \circ (\pm \mathrm{T}_{d'}) \circ \sigma_3$. Alors pour la nouvelle coordonnée $z' := \sigma_3^{-1}(z)$, f_0 et g_0 vérifient la condition 2 ou la condition 3 du théorème 1.

□

Lemme 6 *Soient $E \subset \mathbb{C}$ un compact, f et g deux polynômes de degrés $d > 1$ et $d' > 1$. Supposons que $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$ et que d, d' sont premiers entre eux.*

1. *Si $f(z) = az^d$ et $g(z) = bz^{d'}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors E est une réunion de cercles centrés en 0*

2. Si $f(z) = \pm \mathrm{T}_d$ et $g(z) = \pm \mathrm{T}_{d'}$, alors $E = [-1, 1]$.

Preuve— **1.** On note S_r le cercle de centre 0 et de rayon $r \geq 0$. Pour tout compact non vide $K \subset \mathbb{C}$, on pose $A_K(r)$ le maximum des longueurs des composantes connexes de $S_r \setminus K$. On pose

$$A_K := \sup\{A_K(r) \text{ pour tout } r > 0 \text{ tel que } K \cap S_r \neq \emptyset\}.$$

Posons $F := f^{-1}(E)$. On a $A_F = d^{-1}A_E$. D'autre part, $F = g^{-1}(E)$. D'où $A_F = {d'}^{-1}A_E$. On en déduit que $A_E = A_F = 0$. Par conséquent, E est une réunion de cercles centrés en 0.

2. Notons φ la fonction de Green de $\mathbb{P}^1 \setminus [-1, 1]$ avec un seul pôle en ∞. On a $d^{-1}\varphi \circ f = {d'}^{-1}\varphi \circ g = \varphi$. Notons $E_{-1} = f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$. On a

$$\max_{E_{-1}} \varphi(z) = d^{-1} \max_{E} \varphi(z) = {d'}^{-1} \max_{E} \varphi(z).$$

Par conséquent, $\varphi(z) = 0$ pour $z \in E_{-1}$. D'où $E_{-1} \subset [-1, 1]$ et $E \subset [-1, 1]$. Notons $\psi(z) := (z + z^{-1})/2$. On a $\psi^{-1} \circ f \circ \psi(z) = \pm z^{\pm d}$, $\psi^{-1} \circ g \circ \psi(z) = \pm z^{\pm d'}$. Posons $\tilde{E} := \psi^{-1}(E)$. Alors $\tilde{E} \subset \psi^{-1}([-1, 1]) = \{z : |z| = 1\}$. On a $\tilde{f}^{-1}(\tilde{E}) = \tilde{g}^{-1}(\tilde{E})$ où $\tilde{f}(z) := \pm z^d$ et $\tilde{g}(z) := \pm z^{d'}$. D'après la partie précédente, $\tilde{E}$ est le cercle unité. D'où $E = [-1, 1]$.

$\square$

Preuve du corollaire 1— Dans le corollaire 1, la condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante, supposons par l'absurde qu'il existe deux polynômes distints f et g tels que $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$. Notons Ω la composante connexe de $\mathbb{P}^{-1} \setminus E$ qui contient ∞. Alors $f^{-1}(\Omega) = g^{-1}(\Omega)$. Comme E est de capacité logarithmique positive, il existe une fonction de Green φ de Ω avec un seul pôle en ∞ [16, III.8]. Alors $d^{-1}\varphi \circ f$, ${d'}^{-1}\varphi \circ g$ sont les fonctions de Green de $f^{-1}(\Omega) = g^{-1}(\Omega)$ avec un seul pôle en ∞. Comme la fonction de Green est unique, on a $d^{-1}\varphi \circ f = {d'}^{-1}\varphi \circ g$. On pose $\varphi_0(z) = 0$ si $z \notin \Omega$ et $\varphi_0(z) = \varphi(z)$ si $z \in \Omega$. C'est une fonction subharmonique et $\mu := i\partial\overline{\partial}\varphi_0$ est la mesure d'équilibre de E [16, III]. On obtient par les relations précédentes que $d^{-1}f^*(\mu) = {d'}^{-1}g^*(\mu)$. D'après le théorème 1, on a $f = f_0 \circ Q$ et $g = g_0 \circ Q$. D'où $f_0^{-1}(E) = g_0^{-1}(E)$. Si la condition 1 du théorème 1 est vraie, on a $f_0^{-1}(E) = g_0^{-1}(E) = E$.

Si la condition 2 du théorème 1 est vraie, d'après le lemme précédent, E est une réunion de cercles centrés en 0. On a $P^{-1}(E) = E$ pour toute rotation P de centre 0.

Si la condition 3 est vraie, d'après le lemme précédent, $E = [-1, 1]$. Par conséquent, $P^{-1}(E) = E$ pour $P := \mathrm{T}_k$.

Dans les trois cas, on obtient une contradiction avec l'hypothèse du corollaire 1.

$\square$

Preuve du corollaire 2.— Comme E est de capacité logarithmique positive, E est un ensemble infini. D'après le corollaire 1, il existe un polynôme $P \neq \mathrm{id}$ tel que $P^{-1}(E) = E$. Si $P(z) = az + b$, on a $|a| = 1$ et $a \neq 1$ car E est compact. Alors P est une rotation de centre $b/(1-a)$. C'est impossible. On a donc $\deg P \geq 2$. On sait que J_P est le plus petit compact totalement invariant par P qui contient plus qu'un élément. D'où $J_P \subset E$. Comme K_P est le plus grand compact totalement invariant par P, on a $E \subset K_P$.

$\square$

Dans le cas général, si $E \subset \mathbb{C}$ est un compact et si f, g sont deux polynômes vérifiant $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$, il n'existe pas de mesure μ à support dans E telle que $d^{-1}f^*(\mu) = d'^{-1}g^*(\mu)$. Par exemple pour $E = \{0\}$, $f(z) = z(z-1)$ et $g(z) = z^2(z-1)$, la seule mesure de probabilité μ supportée par E est la masse de Dirac en 0. On a $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$ mais $d^{-1}f^*(\mu) \neq d'^{-1}g^*(\mu)$.

Proposition 4 *Soient $E \subset \mathbb{C}$ un compact, f et g deux polynômes tels que $f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$. Alors il existe deux mesures de probabilité μ_1 et μ_2 à support dans E telles que $g_*(d^{-1}f^*(\mu_1)) = \mu_1$ et $f_*(d'^{-1}g^*(\mu_2)) = \mu_2$.*

Preuve— Soit δ_0 une mesure de probabilité à support dans E. Posons $\delta_n := g_*(d^{-1}f^*(\delta_{n-1}))$ pour tout $n \geq 1$. Alors δ_n est une mesure de probabilité à support dans E. Posons $S_n := (\delta_0 + \cdots + \delta_{n-1})/n$. Alors S_n est également une mesure de probabilité à support dans E. Il existe une suite croissante $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que S_{n_i} tende faiblement vers une mesure μ_1 quand $i \to +\infty$ car l'ensemble des mesures de probabilité à support dans E est compact. On en déduit que $g_*(d^{-1}f^*(S_{n_i}))$ tend faiblement vers $g_*(d^{-1}f^*(\mu_1))$. D'autre part, $g_*(d^{-1}f^*(S_{n_i})) - S_{n_i} = (\delta_{n_i} - \delta_0)/n_i$ tend vers 0. On obtient finalement $g_*(d^{-1}f^*(\mu_1)) = \mu_1$. De même pour μ_2.

$\square$

References

[1] *I.N. Baker, A. Eremenko*, A problem on Julia sets, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, series A.I. Math., **12** (1987), 229-236.

[2] *A.F. Beardon*, Iteration of Rational Functions, *Springer-Verlag*, **132** (1991).

[3] *T.C. Dinh*, Remarque sur les fonctions ayant le même ensemble de Julia, *à paraître dans Ann. Fac. Sci. Toulouse.*

[4] *T.C. Dinh*, Sur les endomorphismes polynomiaux permutables de $\mathbb{P}^2$, *prépublication.*

[5] *A.E. Eremenko*, On somme functional equations connected with iteration of rational function, *Leningrad. Math. J.*, **1** (1990), No. 4, 905-919.

[6] *P. Fatou*, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, *J. Math.*, **2** (1923), 343.

[7] *F. Gross, C.C Yang*, On preimage and range sets of meromorphic functions, *Proc. Japan Acard. Ser. A Math. Sci.*, **58** (1982), 17-20.

[8] *G. Julia*, Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **39** (1922), 131-215.

[9] *H.H. Khoai, N.V. Khue*, Stability of unique rang sets for meromorphic functions, *preprint.*

[10] *G. Levin, F. Przytycki*, When do two functions have the same Julia set?, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125:7** (1997), 2179-2190.

[11] *I.V. Ostrovskii, F.B. Pakovitch, M.G. Zaidenberg*, A Remark on Complex Polynomials of Least Deviation, *I.M.R.N.*, **14** (1996), 699-703.

[12] *F. Pakovitch*, Sur un problème d'unicité pour les fonctions méromorphes, *C.R.A.S. Paris*, **323:1** (1996), 745-748.

[13] *J.F. Ritt*, Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc*, **25** (1923), 399-448.

[14] *B. Shiffman*, Uniqueness of entire and meromorphic functions sharing finite sets, *preprint.*

[15] *N. Steinmetz*, Rational Iteration, *Grutyer Studies in Math.*, **16** (1993).

[16] *M. Tsuji*, Potential theory in modern function theory, *Maruzen Co. LTD.*, (1959).